JANNI

TEORICA ELEMENTARE

DE' DETERMINANTI

SAGGIO

DI UNA

TEORICA ELEMENTARE DE' DETERMINANTI

DEL

SACERDOTE GIUSEPPE JANNI

PROFESSORE SOSTITUTO DI MATEMATICHE NEL LICEO ARCIVESCOVILE
E NEL COLLEGIO DI MARINA.

NAPOLI
REALE TIPOGRAFIA MILITARE
1858.

A S. A. R.

IL CONTE DI AQUILA

VICE AMMIRAGLIO

E PRESIDENTE DEL CONSIGLIO DI AMMIRAGLIATO

Altezza

Ecco il tenue lavoro, di cui V. A. R. ha avuto l'alta degnazione di accogliere la dedica. Io lo pongo ai piedi dell'A. V. R., e sia come un omaggio che io reco a quella solerzia impareggiabile colla quale l'A. V. R., secondando le mire del nostro Augusto Sovrano, promuove l'immegliamento del Real Collegio di Marina al quale son lieto di appartenere.

Coll'aiuto di Dio io spero che la benignità addimostratami dalla V. A. R. mi sia stimolo a cose maggiori.

In questa bacio rispettosamente le mani dell'A. V. R. e mi raffermo colla massima devozione e col più profondo ossequio.

Di. V. A.

Umilissimo e Devotissimo Servo
Sacerdote GIUSEPPE JANNI.

Una delle più interessanti teoriche dell' Analisi sublime è senza dubbio quella dei determinanti; poichè, al dire di Sylvester, essa *è un'algebra al di sopra dell' algebra; un calcolo il quale ci abilita a combinare ed indovinare i risultati delle operazioni algebriche, nello stesso modo come la stessa algebra ci dispensa di formare delle speciali operazioni di aritmetica.* Epperò lo studio di questa teorica ha occupate per molti anni le menti dei matematici. Fin dal 1750 Cramer nelle sue ricerche relative alla risoluzione di un sistema di equazioni di 1.° grado esibì i determinanti risultanti da due e da tre equazioni; e poi per analogia conchiuse la formazione dei determinanti risultanti da un numero maggiore di equazioni. Nel 1764 Bezout nel ricercare il grado dell' eliminata di grandezze ignote da un sistema di equazioni notò diversi casi di determinanti; senza però entrare in alcuna discussione sulle proprietà dei medesimi. Nel 1772 Laplace e Vandermonde esibirono la formazione dei determinanti risultanti da un sistema di equazioni; e come corollarii di essa dimostrarono la proprietà; che un determinante cambia segno colla trasposizione di alcuni suoi elementi; e l'altra, che un determinante si annulla, quando alcuni dei suoi elementi s' identificano. Nel 1773 Lagrange dimostrò che il quadrato di un determinante di 3.° ordine è anche esso un determinante; ed

applicò questa proprietà alla dimostrazione dei teoremi relativi alla piramide triangolare, ed al problema della rotazione dei corpi solidi. Questa proprietà dimostrata da Lagrange fu in seguito generalizzata da Gaus; avendo questi dimostrato; che il prodotto di due determinanti del secondo o del terzo ordine è anche un determinante. Si vuole che Gaus avesse introdotta nella scienza la parola *determinante*. Nel 1812 Binet pubblicò una memoria nella quale stabilì tutti i principali teoremi dei determinanti del 2.°, 3.° e 4.° ordine; e li applicò alla discussione dei romboidi, alla dimostrazione delle proprietà delle superficie del 2.° ordine, e di quelle dei corpi solidi. Nel 1815 Cauchy publicò una memoria nella quale diede la regola generale per la moltiplicazione dei determinanti; ed inoltre dimostrò le proprietà dei determinanti ad elementi reciproci, ed i più rilevanti teoremi relativi ai determinanti minori. A questo lavoro di Cauchy ne seguirono altri sopra dei punti relativi a tal soggetto, ma di questi i più completi sono due memorie di M. Jacobi l'una intitolata *De formatione et proprietatibus Determinantium*, l'altra *De Determinantibus funtionabibus*; la *Teorica dei Determinanti di Brioschi*, due memorie di Spottiswoode, le quali portano il titolo, *Elementary Theorems relating to Determinants;* in fine il trattato di Batlren. *Theorie und Aucerendung der Determinanten*. Ma, a dir vero, tutti questi lavori, quantunque siano di grandissimo merito; pure non hanno resa generalmente accessibile una tanto importante teoria; per essere le dimostrazioni o totalmente neglette, ovvero di una immensa difficoltà. Laonde noi ci proponevamo in una serie di memorie di mettere più in luce le diverse parti che la compongono, come anche le sue principali e più interessanti applicazioni. In questo primo lavoro ci fermiamo a dimostrare i teoremi elementari relativi alla formazione, addizione, sottrazione, moltiplicazione e scomposizione dei determinanti.

Sentiamo il dovere intanto di annunziare che, mentre noi ci occupavamo di questo lavoro, l'egregio nostro professore *Signor Trudi* presentava all'Accademia cinque memorie relative ai determinanti, le quali, essendo state dagli accademici giudicate di moltissimo merito, verranno inserite negli atti.

CAPO PRIMO

Principii fondamentali.

Per la chiara intelligenza di ciò che segue; è da notarsi: che in un gruppo $a_{\alpha_1}\ a_{\alpha_2} \ldots a_{\alpha_p} \ldots a_{\alpha_q} \ldots a_{\alpha_r}$ di più Simboli, uno qualunque di essi, per esempio a_{α_p}, introduce tante inversioni quanti sono i simboli che seguono a_{α_p}, ed hanno gl' indici minori di α_p: e che un gruppo presenta tante inversioni quant'è la somma dei numeri delle inversioni che presenta ciascuno dei simboli che lo compongono. Così il gruppo $a_3 a_2 a_1$ presenta tre inversioni.

Per formare le permutazioni ad n ad n di n simboli

$$a_1\ ,\ a_2\ ,\ a_3\ , \ldots . a_n\ ;$$

può seguirsi il seguente processo: Si formino le combinazioni ad m ad m di questi simboli, supponendo che m sia minore di n; indi si formino le permutazioni di ciascuna di queste combinazioni; e ciascuna di esse si ponga avanti a ciascuna delle permutazioni dei rimanenti $n-m$ simboli. Quindi risulta, che le permutazioni di n simboli possono dividersi in classi ciascuna delle quali contenga $1.2.3\ldots(n-1)$ gruppi che provengono dalle permutazioni di $(n-1)$ degli n simboli proposti, ponendo innanzi a ciascuna di esse l' n^o simbolo escluso.

Noi indichiamo con $\frac{\mathrm{P}}{a_r}$ l' assieme delle permutazioni degli $n-1$ simboli restanti, escludendo a_r; e le suddette classi coi simboli

$$a_1 \frac{\mathrm{P}}{a_1}\ ,\ a_2 \frac{\mathrm{P}}{a_2}\ ,\ a_3 \frac{\mathrm{P}}{a_3} \ldots . a_n \frac{\mathrm{P}}{a_n}\ . \qquad (\alpha)$$

Similmente le stesse permutazioni possono dividersi in classi, ciascuna delle quali comprenda $2 \times (n-2)(n-3)\ldots 2.1$ gruppi i quali provengono dalle permutazioni di $n-2$ dei simboli proposti, ponendo innanzi a ciascuna di esse successivamente ciascuna delle permutazioni dei rimanenti due simboli.

In generale le stesse permutazioni possono dividersi in classi, ciascuna delle quali comprenda $1.2..m \times (n-m)(n-m-1)...2.1$ gruppi, i quali provengono dalle permutazioni di $n-m$ dei simboli proposti, ponendo successivamente innanzi a ciascuna di esse ciascuna delle permutazioni dei rimanenti m simboli. Noi indichiamo col simbolo

$$(a_1, a_2 \ldots a_m)_p$$

l'assieme delle permutazioni della combinazione ad m ad m la quale è stata la p^a per ordine di formazione; col simbolo

$$(a_{m+1}, a_{m+2} \ldots a_n)_p$$

l'assieme delle permutazioni dei rimanenti $n-m$ simboli; e le suddette classi coi simboli

$$(a_1, a_2 \ldots a_m)_1 (a_{m+1}, a_{m+2} \ldots a_n)_1, (a_1, a_2 \ldots a_m)_2 (a_{m+1}, a_{m+2} \ldots a_n)_2 \ldots$$
$$(a_1, a_2 \ldots a_m)_\alpha (a_{m+1}, a_{m+2} \ldots a_n)_\alpha \qquad (\beta)$$

indicando con α il numero $n \dfrac{(n-1)\ldots(n-m+1)}{1.2.3\ldots m}$.

Oltre del succennato metodo di formare le permutazioni di n simboli; possiamo anche seguire il seguente procedimento: Si formino le permutazioni di $n-1$ di essi; indi in ciascuna di queste si faccia occupare al simbolo escluso tutti i posti possibili. Di qui nasce; che le permutazioni di n simboli possano dividersi in classi, ciascuna delle quali contenga $1.2\ldots(n-1)$ gruppi i quali provengono dalle permutazioni di $n-1$ dei simboli proposti, escluso a_1, ponendo in ciascuna di esse a_1 dopo un determinato numero di simboli. Noi indichiamo con $a_{1_p} \dfrac{P}{a_1}$ l'assieme delle permutazioni in cui a_1 è posto dopo $p-1$ simboli; per modo che le suddette classi verranno rappresentate dai simboli

$$a_{1_1} \frac{P}{a_1}, \; a_{1_2} \frac{P}{a_1}, \; a_{1_3} \frac{P}{a_1} \ldots \; a_{1_n} \frac{P}{a_1}. \qquad (\gamma)$$

Dalla natura stessa delle permutazioni ad n ad n di n simboli segue; che ad una qualunque delle medesime corrisponde un'altra dalla quale quella differisce per lo scambio di un determinato simbolo, $p \cdot e$. a_{α_p}, in un altro determinato, $p \cdot e$. $a_{\alpha_{p+m}}$: quindi si possono queste permutazioni dividere in coppie, ciascuna delle quali contenga due gruppi che differiscono l'uno dall'altro per lo scambio di due determinati simboli, p. e. a_{α_p}, $a_{\alpha_{p+m}}$ l'uno nell'altro. Ora se $m = 1$ saranno

$$a_{\alpha_1} a_{\alpha_2} \ldots\ldots a_{\alpha_p} \; a_{\alpha_{p+1}} \ldots\ldots a_{\alpha_n} \qquad (A)$$

$$a_{\alpha_1} a_{\alpha_2} \ldots\ldots a_{\alpha_{p+1}} \; a_{\alpha_p} \ldots\ldots a_{\alpha_n} \qquad (B)$$

i gruppi di una coppia qualunque; e supponendo che α_p sia minore di α_{p+1}; evidentemente il gruppo (B) presenterà una sola inversione di più del gruppo (A), la quale sarebbe $a_{\alpha_{p+1}}\, a_{\alpha_p}$. Che se $m=2$; i gruppi di una coppia qualunque saranno

$$a_{\alpha_1}\, a_{\alpha_2} \ldots\ldots a_{\alpha_p}\quad a_{\alpha_{p+1}}\, a_{\alpha_{p+2}} \ldots\ldots a_{\alpha_n} \qquad (A)$$

$$a_{\alpha_1}\, a_{\alpha_2} \ldots\ldots a_{\alpha_{p+2}}\, a_{\alpha_{p+1}}\, a_{\alpha_p} \quad \ldots\ldots a_{\alpha_n} \qquad (B);$$

ed è chiaro che se α_{p+1} è compreso tra α_p ed α_{p+2}, ed $\alpha_p<\alpha_{p+2}$; il gruppo (B) presenterà tre inversioni più di (A); e ne presenterà una sola di più, avverandosi solo la seconda ipotesi. Che se $m=3$ i gruppi di una coppia qualunque saranno

$$a_{\alpha_1}\, a_{\alpha_2} \ldots\ldots a_{\alpha_p}\quad a_{\alpha_{p+1}}\, a_{\alpha_{p+2}}\, a_{\alpha_{p+3}} \ldots\ldots a_{\alpha_n} \qquad (A)$$

$$a_{\alpha_1}\, a_{\alpha_2} \ldots\ldots a_{\alpha_{p+3}}\, a_{\alpha_{p+2}}\, a_{\alpha_{p+1}}\, a_{\alpha_p} \quad \ldots\ldots a_{\alpha_n} \qquad (B);$$

e (B) presenterà cinque inversioni più di (A), se $\alpha<\alpha_{p+3}$, ed α_{p+1}, α_{p+2} sono compresi tra α_p ed α_{p+3}; ne presenterà tre di più se, essendo $\alpha_p<\alpha_{p+3}$, un solo dei due indici α_{p+1}, α_{p+2} è compreso tra α_p ed α_{p+3}; ne presenterà una sola di più se α_{p+1} ed α_{p+2} non sono compresi tra α_p ed α_{p+3}. Generalmente se i gruppi (A) e (B) di una coppia sono tali che tra i simboli permutati ve ne sono $m-1$ altri, per modo che questi siano rappresentati da a_{α_p}, $a_{\alpha_{p+m}}$; allora (B), supposto che $\alpha_p<\alpha_{p+m}$, presenterà tante inversioni più di (A) quant'è il doppio numero dei simboli compresi tra a_{α_p} ed $a_{\alpha_{p+m}}$, i cui indici sono compresi tra α_p ed α_{p+m}, più uno: laonde possiamo conchiudere il

Teorema: *I due numeri d' inversioni che presentano i due gruppi di ogni coppia di quelle, in cui possono dividersi le permutazioni ad* n *ad* n *di* n *simboli, differiscono per un numero impari.*

CAPO SECONDO

Proprietà generali ai determinanti.

Se con n simboli $a_{\alpha_1}, a_{\alpha_2}, a_{\alpha_3} \ldots\ldots a_{\alpha_n}$ formate le permutazioni ad n ad n; diamo a ciascuna di esse il segno $+$ o $-$, secondochè presenta un numero pari o impari d'inversioni, ed apponiamo ai simboli successivi che la compongono rispettivamente i secondi indici $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \ldots \beta_n$ i quali siano gli stessi per tutte le permutazioni; supponendo che i simboli i quali differiscono almeno per uno dei doppii indici rappresentino quantità diverse; il polinomio così formato dicesi un *determinante*. Riflettendo sulla definizione del determinante, facilmente si rileva; che i primi fattori dei termini successivi di tal polinomio sono successivamente le grandezze

$$a_{\alpha_1 \cdot \beta_1},\ a_{\alpha_2 \cdot \beta_1} \ldots\ldots a_{\alpha_n \cdot \beta_1};$$

che i secondi fattori sono successivamente le grandezze

$$a_{\alpha_1 \cdot \beta_2},\ a_{\alpha_2 \cdot \beta_2} \ldots\ldots a_{\alpha_n \cdot \beta_2};$$

e così di seguito; finalmente gli ultimi fattori sono successivamente le grandezze

$$a_{\alpha_1 \cdot \beta_n},\ a_{\alpha_2 \cdot \beta_n} \ldots\ldots a_{\alpha_n \cdot \beta_n};$$

per questa ragione è conveniente di simboleggiare il determinante in parola col quadro

$$\begin{vmatrix} a_{\alpha_1 \cdot \beta_1} & a_{\alpha_2 \cdot \beta_1} & a_{\alpha_3 \cdot \beta_1} & \ldots\ldots & a_{\alpha_n \cdot \beta_1} \\ a_{\alpha_1 \cdot \beta_2} & a_{\alpha_2 \cdot \beta_2} & a_{\alpha_3 \cdot \beta_2} & \ldots\ldots & a_{\alpha_n \cdot \beta_2} \\ a_{\alpha_1 \cdot \beta_3} & a_{\alpha_2 \cdot \beta_3} & a_{\alpha_3 \cdot \beta_3} & \ldots\ldots & a_{\alpha_n \cdot \beta_3} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{\alpha_1 \cdot \beta_n} & a_{\alpha_2 \cdot \beta_n} & a_{\alpha_3 \cdot \beta_n} & \ldots\ldots & a_{\alpha_n \cdot \beta_n} \end{vmatrix}.$$

Poichè tutti i termini di un determinante sono del medesimo grado, il quale è uguale al numero dei simboli ausiliarii adoperati per formarlo, ovvero al numero delle quantità, o *elementi*, che sono in una linea orizzontale o verticale del quadro che lo simboleggia: così si dice che questo numero indichi l'ordine del determinante. Se alle due serie di indici $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_n; \beta_1, \beta_2, \beta_3 \ldots \beta_n$ si

sostituisce la serie dei numeri successivi $1, 2, 3, \dots n$; allora il determinante superiore sarà rappresentato dal quadro

$$\left|\begin{array}{ccccc} a_{1.1} & a_{2.1} & a_{3.1} & \dots\dots & a_{n.1} \\ a_{1.2} & a_{2.2} & a_{3.2} & \dots\dots & a_{n.2} \\ a_{1.3} & a_{2.3} & a_{3.3} & \dots\dots & a_{n.3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1.n} & a_{2.n} & a_{3.n} & \dots\dots & a_{n.n} \end{array}\right| . \qquad (1)$$

Se in questo quadro noi sopprimiamo m qualunque linee orizzontali ed m qualunque linee verticali; il rimanente quadro evidentemente rappresenterà il determinante che si produrrebbe, facendo le permutazioni dei simboli che sono nella prima linea orizzontale ai quali sia soppresso il secondo indice, ed apponendo ai simboli successivi che compongono ciascuna di queste permutazioni rispettivamente i secondi indici dei simboli che formano la prima linea verticale. Questo secondo determinante dicesi *determinante minore* per rispetto al determinante (1) il quale chiamasi *determinante principale*. Il determinante che si ottiene prendendo nelle m linee orizzontali escluse le m verticali corrispondenti alle verticali escluse chiamasi *complementare* del precedente minore.

Intendiamo che le permutazioni di n simboli siano divise nelle classi indicate dai simboli (α); indi ai simboli di ciascun gruppo apponiamo per secondi indici dei numeri che indicano i posti che essi occupano nel medesimo; in fine intendiamo che ciascuno dei monomii risultanti prenda la forma seguente

$$\pm a_{\alpha_1 . 1} \times \pm a_{\alpha_2 . 2} a_{\alpha_3 . 3} \dots a_{\alpha_n . n};$$

dando ad $a_{\alpha_1 . 1}$ il segno $+$ o $-$, secondochè è pari o impari il numero delle inversioni che il simbolo a_{α_1} introduce nel gruppo

$$a_{\alpha_1} a_{\alpha_2} a_{\alpha_3} \dots\dots a_{\alpha_n};$$

ovvero secondochè $\alpha_1 - 1$ è pari o impari; essendo evidentemente $\alpha_1 - 1$ il numero degli indici minori di α_1 che presenta il gruppo $a_{\alpha_1} a_{\alpha_2} a_{\alpha_3} \dots\dots a_{\alpha_n}$; ed alla seconda parte del precedente prodotto il segno $+$ o $-$, secondochè è pari o impari il numero delle inversioni che presenta il gruppo

$$a_{\alpha_2} a_{\alpha_3} \dots\dots a_{\alpha_n}.$$

Per siffatta apposizione di segni ciascuno dei termini da noi testè formati avrà il segno $+$ o $-$, secondochè è pari o impari il numero delle inversioni che presenta la permutazione da cui è stato dedotto; quindi il polinomio formato dall' assieme di tutti questi termini sarà il determinante prodotto dai simboli ausiliarii

$$a_1, a_2, a_3, \dots\dots a_n;$$

ossia il determinante (1). Inoltre i termini provenienti da una classe qualunque $a_p \frac{P}{a_p}$ di permutazioni sono prodotti di due fattori dei quali i primi sono tutti uguali a $\pm a_{p,1}$, ed i secondi sono formati dalle permutazioni $\frac{P}{a_p}$, apponendo ai simboli successivi di ciascuna di esse rispettivamente i secondi indici 2.3...n, e dando a ciascuno dei gruppi risultanti il segno $+$ o $-$, secondochè è pari o impari il numero delle inversioni che presentano i simboli che lo compongono; adunque i termini risultanti dalla classe $a_p \frac{P}{a_p}$ sono il prodotto di $\pm a_p$, pel determinante minore che si ottiene da (1), escludendo la prima linea orizzontalo e la p^a linea verticale: adunque se indichiamo con $\frac{P}{a_{p,1}}$ un tale determinante, e con P il determinante (1); si avrà la relazione

$$P = a_{1,1}\frac{P}{a_{1,1}} - a_{2,1}\frac{P}{a_{2,1}} \ldots \pm a_{p,1}\frac{P}{a_{p,1}} \ldots \pm a_{n,1}\frac{P}{a_{n,1}}$$

dalla quale apparisce la verità del seguente.

Teorema 1.° *Un determinante di un ordine qualunque è uguale alla somma algebrica dei prodotti che si ottengono moltiplicando ciascuno elemento della prima linea orizzontale pel determinante minore formato, escludendo la prima linea orizzontale, e la linea verticale che corrisponde all' elemento moltiplicatore: osservando che ciascun prodotto deve esser preso col segno $+$ o $-$, secondochè il primo indice dell' elemento moltiplicatore è impari o pari.*

Se poggiati sul teorema precedente sviluppiamo un determinante dell'ordine n^o in altri minori dell'ordine $(n-1)^o$, indi poi sviluppiamo ciascuno di questi in altri dell'ordine $(n-2)^o$, e così di seguito; arriveremo in fine ad avere esplicitamente tutti i diversi termini che compongono lo sviluppo del determinante proposto. Così si ha

Esempio 1.°
$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & a_{3,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & a_{3,2} \\ a_{1,3} & a_{2,3} & a_{3,3} \end{vmatrix} = a_{1,1}\begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{3,2} \\ a_{2,3} & a_{3,3} \end{vmatrix} - a_{2,1}\begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{3,2} \\ a_{1,3} & a_{3,3} \end{vmatrix} + a_{3,1}\begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{2,2} \\ a_{1,3} & a_{2,3} \end{vmatrix} =$$
$$a_{1,1}\, a_{2,2}\, a_{3,3} - a_{1,1}\, a_{3,2}\, a_{2,3} + a_{2,1}\, a_{3,2}\, a_{1,3}$$
$$- a_{2,1}\, a_{1,2}\, a_{3,3} + a_{3,1}\, a_{1,2}\, a_{2,3} - a_{3,1}\, a_{2,2}\, a_{1,3}$$

Esempio 2.°
$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = x_1\begin{vmatrix} y_2 & 1 \\ y_3 & 1 \end{vmatrix} - y_1\begin{vmatrix} x_2 & 1 \\ x_3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$
$$x_1y_2 - x_1y_3 + x_3y_1 - x_2y_1 + x_2y_3 - x_3y_2;$$

or siccome questa espressione indica il doppio dell' area del triangolo i cui

vertici sono (x_1y_1) (x_2y_2) (x_3y_3), così anche questo sarà il significato geometrico del precedente determinante: laonde la condizione perchè i suddetti punti siano in linea retta verrà dinotata dall'equazione

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Esempio 3.°
$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = x_1 \begin{vmatrix} y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \\ y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} - y_1 \begin{vmatrix} x_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} + z_1 \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} = \text{etc.}$$

Questo determinante rappresenta il volume della piramide i cui vertici sono determinati dalle coordinate $(x_1y_1z_1)$, $(x_2y_2z_2)$, $(x_3y_3z_3)$, $(x_4y_4z_4)$; laonde la condizione perchè questi quattro punti siano sopra un piano è dinotata dall'equazione

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Il teorema testè dimostrato può esser generalizzato, come da quanto segue apparirà.

Intendiamo che le permutazioni di n simboli siano divise nelle classi indicate dai simboli (β), indi apponiamo ai simboli successivi di ciascuna permutazione dei secondi indici i quali siano i numeri della serie $1.2.3....n$ presi con un ordine determinato, in fine intendiamo che ciascuno dei monomii risultanti sia posto sotto la forma

$$\pm(\pm a_{\alpha_1 \cdot \beta_1}\, a_{\alpha_2 \cdot \beta_2} \ldots a_{\alpha_m \cdot \beta_m})(\pm a_{\alpha_{m+1} \cdot \beta_{m+1}} \ldots a_{\alpha_n \cdot \beta_n})\,;$$

prendendo il segno + o — fuori le parentesi, secondochè è pari o impari il numero delle inversioni che i simboli $a_{\alpha_1}, a_{\alpha_2} \ldots a_{\alpha_m}$ introducono nel gruppo $a_{\alpha_1}, a_{\alpha_2} \ldots a_{\alpha_m}\, a_{\alpha_{m+1}} \ldots a_{\alpha_n}$, quando sono tutti paragonati ai simboli $a_{\alpha_{m+1}} \ldots a_{\alpha_n}$. il segno + o — avanti alla grandezza posta nella prima parentesi, secondochè è pari o impari il numero delle inversioni che presenta il gruppo $a_{\alpha_1}\, a_{\alpha_2} \cdots a_{\alpha_m}$, ed in fine il segno + o — avanti alla grandezza posta nella seconda parentesi,

secondochè è pari o impari il numero delle inversioni che presenta il gruppo

$$a_{x_{m+1}} \ldots a_{x_n}.$$

Egli è evidente che per tale apposizione di segni ciascuno dei termini testè costituiti avrà il segno $+$ o $-$, secondochè è pari o impari il numero delle inversioni che presenta la permutazione donde è stato dedotto; poichè il numero delle inversioni che presenta un gruppo qualunque

$$a_{x_1}\, a_{x_2}\, a_{x_3} \ldots a_{x_m}\, a_{x_{m+1}} \ldots a_{x_n}$$

è la somma delle inversioni che presenta il gruppo $a_{x_1}\, a_{x_2} \ldots a_{x_m}$, delle inversioni che presenta il gruppo $a_{x_{m+1}} \ldots a_{x_n}$, e delle inversioni che danno i simboli $a_{x_1}, a_{x_2} \ldots a_{x_m}$, quando sono tutti paragonati agli altri $a_{x_{m+1}} \ldots a_{x_n}$; laonde l'assieme di tutti i termini suddetti costituisce lo sviluppo del determinante (1).

Ora esaminando la natura dei termini che risultano dalle permutazioni di una classe qualunque

$$(a_1\,,\, a_2 \ldots\ldots a_m)_p (a_{m+1}\,,\, a_{m+2} \ldots\ldots a_p)_p\,, \qquad (p)$$

osserviamo. 1.° Il segno che è fuori le parentesi è lo stesso per tutti: poichè questo risulta dal paragone dei simboli posti nella prima parentesi coi simboli posti nella seconda, e tanto gli uni quanto gli altri sono gli stessi per tutti i termini in esame. 2.° Delle grandezze contenute nelle prime parentesi solo $1.2.3\ldots m$ sono diverse; e queste provengono dalle permutazioni $(a_1\,,\, a_2 \ldots a_m)_p$, dando ai successivi simboli che compongono ciascuna d'esse dei secondi indici i quali sono m numeri della serie $1.2.3\ldots n$ presi con un ordine determinato, ed apponendo a ciascun monomio risultante il segno $+$ o $-$, secondochè è pari o impari il numero delle inversioni che presentano i simboli che entrano a formarlo; adunque le grandezze diverse contenute nelle prime parentesi formano il determinante minore che si ottiene da (1), prendendo nelle m linee orizzontali corrispondenti ai secondi indici le m linee verticali corrispondenti alla $p$esima combinazione ad m ad m degli n simboli proposti. 3.° Delle grandezze contenute nelle seconde parentesi solo $1.2.3\ldots(n-m)$ sono diverse, e queste provengono dalle permutazioni $(a_{m+1}\,,\, a_{m+2} \ldots a_n)_p$, apponendo ai simboli successivi di ciascuna di esse per secondi indici rispettivamente i rimanenti numeri della serie $1.2.3\ldots n$ presi con un ordine determinato, e dando a ciascun monomio risultante il segno $+$ o $-$, secondochè è pari o impari il numero delle inversioni che presentano i simboli che lo compongono; adunque queste parti formano il determinante minore complementare del precedente. 4.° Ciascuna delle parti diverse di quelle contenute nelle prime parentesi è moltiplicata per ciascuna delle parti diverse di quelle contenute nelle seconde parentesi; adunque conchiudiamo che i termini risultanti dalla classe (p) formano il prodotto del determinante formato, prendendo nelle m linee orizzontali del determinante (1) corrispondenti ai secondi indici apposti ai simboli delle

permutazioni $(a_1, a_2 \dots a_m)_p$ le m linee verticali corrispondenti alla peesima combinazione ad m ad m dei simboli $a_1, a_2, a_3 \dots a_n$ pel determinante minore complementare: laonde se dinotiamo questo prodotto col simbolo

$$\pm(a_{1.1}\, a_{2.2} \dots a_{m.m})_p (a_{m+1.m+1} \dots a_{n.n})_p\,;$$

si avrà che

$$\mathrm{P} = \Sigma \pm (a_{1.1}\, a_{2.2} \dots a_{m.m})_p (a_{m+1.m+1} \dots a_{n.n})_p$$

dalla quale relazione il seguente.

Teorema 2.° *Un determinante dell'ordine* n° *è uguale alla somma dei prodotti dei determinanti formati da tutti i gruppi di* m *linee verticali prese in* m *qualunque linee orizzontali, e da tutti i gruppi di* n—m *linee verticali prese nelle rimanenti* n—m *linee orizzontali; avvertendo che una linea verticale non sia adoperata due volte, e che ciascuno dei prodotti sia preso col segno* + o —, *secondochè è pari o impari il numero delle inversioni che presentano gli elementi del primo determinante relativamente agli elementi del secondo; ovvero, secondochè è pari o impari il numero delle inversioni nell'ordine naturale dei numeri che presentano i primi indici degli elementi del primo determinante relativamente ai primi indici del secondo.*

Così si avrà

$$\begin{vmatrix} a_{1.1} & a_{2.1} & a_{3.1} & a_{4.1} \\ a_{1.2} & a_{2.2} & a_{3.2} & a_{4.2} \\ a_{1.3} & a_{2.3} & a_{3.3} & a_{4.3} \\ a_{1.4} & a_{2.4} & a_{3.4} & a_{4.4} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1.1} & a_{2.1} \\ a_{1.2} & a_{2.2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{3.3} & a_{4.3} \\ a_{3.4} & a_{4.4} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{3.1} & a_{4.1} \\ a_{3.2} & a_{4.2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{1.3} & a_{2.3} \\ a_{1.4} & a_{2.4} \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{1.1} & a_{4.1} \\ a_{1.2} & a_{4.2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{2.3} & a_{3.3} \\ a_{2.4} & a_{3.4} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{1.1} & a_{3.1} \\ a_{1.2} & a_{3.2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{2.3} & a_{4.3} \\ a_{2.4} & a_{4.4} \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{2.1} & a_{3.1} \\ a_{2.2} & a_{3.2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{1.3} & a_{4.3} \\ a_{1.4} & a_{4.4} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{2.1} & a_{4.1} \\ a_{2.2} & a_{4.2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{1.3} & a_{3.3} \\ a_{1.4} & a_{3.4} \end{vmatrix}.$$

Poichè un determinante si può decomporre nella somma di prodotti di due determinanti minori; così può anche un determinante decomporsi nella somma di prodotti di più di due determinanti minori. Infatti supponiamo che un determinante sia sviluppato nella somma di prodotti di due determinanti minori: sviluppando i determinanti minori che sono i primi fattori dei diversi prodotti in somme di prodotti di due determinanti minori; il determinante principale sarà espresso da una somma di prodotti di tre determinanti minori. Resta a conoscere il segno da darsi a ciascuno di questi prodotti: a tal fine osserviamo; che nella prima decomposizione del determinante principale un prodotto qualunque è positivo o negativo, secondochè i primi indici degli elementi del primo determinante minore paragonati ai primi indici degli elementi del secondo determinante minore presentano un numero pari

o impari d'inversioni nell'ordine naturale dei numeri: ma decomponendo il primo di questi due determinanti minori nella somma di prodotti di due altri determinanti minori; un termine qualunque di questa somma è positivo o negativo, secondochè i primi indici del primo determinante minore paragonati ai primi indici degli elementi del secondo presentano un numero pari o impari d'inversioni; adunque un termine qualunque della somma di prodotti di tre determinanti minori è positivo o negativo, secondochè è pari o impari la somma del numero delle inversioni che presentano i primi indici del primo determinante minore paragonati ai primi indici del secondo e del terzo, e del numero delle inversioni che i primi indici degli elementi del secondo presentano, quando sono paragonati a quelli del terzo. Progredendo così nella decomposizione di uno dei determinanti minori di ciascun termine dello sviluppo già ottenuto del determinante proposto; possiamo generalmente conchiudere il seguente.

Teorema 3.° *Se* $\alpha, \beta, \ldots$ k *sono dei numeri tali che la loro somma sia uguale ad* n; *un determinante dell' ordine* n° *si può decomporre nella somma dei prodotti dei determinanti formati da tutti i gruppi di* α *linee verticali prese in* α *qualunque linee orizzontali, da tutti i gruppi di* β *linee verticali prese in* β *qualunque delle rimanenti* n—2 *linee orizzontali, e così di seguito; in fine da tutti i gruppi di* k *linee verticali prese nelle residuali* k *linee orizzontali, avvertendo che una linea verticale non sia due volte adoperata, e che ciascuno di questi prodotti sia preso col segno* + o —, *secondochè la somma delle inversioni che presentano i primi indici degli elementi di ciascun determinante minore relativamente ai primi indici degli elementi dei determinanti minori seguenti è pari o impari.*

In forza di questo teorema un determinante dell'ordine n si può decomporre nella somma di prodotti di determinanti minori, la somma dei cui ordini sia uguale ad n: ora se supponiamo che svaniscano gli elementi, i quali sono contenuti nelle prime i linee verticali delle ultime i linee orizzontali; e decomponiamo il determinante nella somma di prodotti di determinanti minori rispettivamente degli ordini i ed $n-i$; poichè una sola combinazione di $n-i$ linee verticali delle ultime $n-i$ linee orizzontali ha tutte le sue linee differenti da zero; così la somma in parola si riduce ad un sol termine che è composto dal prodotto del determinante formato dalle prime i linee verticali delle prime i linee orizzontali, pel determinante formato dalle seconde $n-i$ linee verticali delle seconde $n-i$ linee orizzontali: adunque possiamo conchiudere il seguente.

Teorema 4.° *Se nelle ultime* n—i *linee orizzontali di un determinante dell' ordine* n° *tutte le linee verticali, eccetto le ultime* n—i, *si annullano; il determinante sarà uguale al prodotto dei determinanti formati rispettivamente dalle prime, e dalle ultime* n—i *linee orizzontali e verticali.*

Da questo teorema immediatamente si deduce l'altro:

Teorema 5.° *Se in uno dei parallelogrammi che sono complementi dei due quadrati intorno alla diagonale di un determinante tutti gli elementi svaniscono, tutti gli elementi nell'altro complemento possono essere posti uguali a zero; senza che si alteri il valore del determinante.*

Fra gli altri casi particolari possono esser notati i seguenti:

Queste due relazioni possono essere così enunciate.

Teorema 6.° *Il valore di un determinante dell'ordine* n° *non si altera; considerandolo come un determinante dell'* (n+i)° *ordine, avendo delle unità sulla diagonale, e zeri in tutti gli altri posti nelle prime* i *linee orizzontali e verticali.*

Teorema 7.° *Un determinante di cui tutti gli elementi da una parte della sua diagonale svaniscono consiste del suo termine principale, ovvero del prodotto degli elementi posti sulla diagonale.*

Oltre del metodo risultante dal teorema 1.° per sviluppare un determinante ve n'ha un altro di cui ora ci occuperemo.

Intendiamo che le permutazioni degli n simboli $a_1, a_2 \ldots a_n$ siano divise nelle classi indicate dai simboli (γ), indi apponiamo ai simboli successivi di ciascuna permutazione dei secondi indici che indichino i posti da essi occupati

nella permutazione; in fine poniamo ciascuno dei monomii risultanti sotto la forma

$$\pm a_{1,p} \times \pm a_{x_1 \cdot 1}\, a_{x_2 \cdot 2} \ldots a_{x_{p-1} \cdot p-1}\, a_{x_p \cdot p+1} \ldots a_{x_{n-1} \cdot n},$$

prendendo innanzi ad $a_{1,p}$ il segno $+$ o $-$, secondochè $p-1$ è pari o impari, ed il segno $+$ o $-$ innanzi alla seconda parte del termine precedente, secondochè è pari o impari il numero delle inversioni che presenta il gruppo $a_{x_1} a_{x_2} \ldots a_{x_{n-1}}$. Egli è evidente che per tale apposizione di segni ciascuno dei termini da noi composti ha il segno $+$ o $-$, secondochè è pari o impari il numero delle inversioni che presentano i simboli che lo compongono; poichè il numero delle inversioni che presenta una permutazione qualunque

$$a_{x_1} a_{x_2} \ldots a_{x_{p-1}} a_1\, a_{x_p} \ldots a_{x_{n-1}} \qquad (\delta)$$

è uguale alla somma delle inversioni del gruppo $a_{x_1} a_{x_2} \ldots a_{x_{p-1}} a_{x_p} \ldots a_{x_{n-1}}$, più $p-1$, che indica il numero delle inversioni che il simbolo a_1 introduce nel gruppo (δ): laonde l'assieme di tutti i termini da noi composti formano il determinante (1). Ora studiando la natura dei termini prodotti dalle permutazioni di una classe qualunque $a_{1,p}\frac{\mathrm{P}}{a_1}$, osserviamo: che essi sono composti di due parti delle quali la prima $\pm a_{1,p}$ è la stessa in tutti, e le seconde provengono dalle permutazioni $\frac{\mathrm{P}}{a_1}$, apponendo ai simboli successivi di ciascuna rispettivamente i secondi indici $1, 2, \ldots p-1, p+1 \ldots n$, ed affiggendo a ciascuno dei monomii risultanti il segno $+$ o $-$, secondochè è pari o impari il numero delle inversioni che presentano i simboli che lo compongono; adunque queste seconde parti formano il determinante minore che si ottiene dal determinante (1), escludendo la prima linea verticale e la p^a linea orizzontale; adunque indicando con $\frac{\mathrm{P}}{a_{1,p}}$ questo determinante si ha la relazione

$$\mathrm{P} = a_{1,1}\frac{\mathrm{P}}{a_{1,1}} - a_{1,2}\frac{\mathrm{P}}{a_{1,2}} \ldots \pm a_{1,p}\frac{\mathrm{P}}{a_{1,p}} \ldots \pm a_{1,n}\frac{\mathrm{P}}{a_{1,n}}$$

la quale dà luogo al seguente

Teorema 8.° *Un determinante di un ordine qualunque è uguale alla somma algebrica dei prodotti che si ottengono moltiplicando ciascun elemento della prima linea verticale pel determinante minore che si ottiene, escludendo dal determinante principale la prima linea verticale, e la linea orizzontale corrispondente all'elemento moltiplicatore; osservando di dare a ciascun prodotto il segno $+$ o $-$, secondochè il secondo indice dell'elemento moltiplicatore è impari o pari.*

Se dopo avere sviluppato secondo il metodo indicato dal precedente teorema un determinante dell'ordine n^o in altri minori dell'ordine $(n-1)^o$; sviluppiamo questi nello stesso modo in altri dell'ordine $(n-2)^o$, e così facciamo successivamente; avremo lo sviluppo del determinante proposto per le sue

linee verticali. Ora ravvicinando questo sviluppo di un determinante per le sue linee verticali con quello per le linee orizzontali, evidentemente apparisce, che essi si compiono collo stesso metodo; quindi conchiudiamo il seguente.

Teorema 9.° *Il valore di un determinante non cambia se tutte le linee orizzontali si cambiano in linee verticali, conservando ciascuna il medesimo posto di ordine che aveva.* Ravvicinando questo teorema col teorema 5.° siamo condotti a stabilire l' altro.

Teorema 10.° *Se* $\alpha, \beta, \ldots$ k *sono dei numeri tali che la loro somma sia uguale ad* n; *un determinante dell' ordine* n^o *si può esprimere colla somma dei prodotti dei determinanti formati da tutti i gruppi di* α *linee orizzontali presi in* α *qualunque linee verticali, da tutti i gruppi di* β *linee orizzontali prese in* β *qualunque delle rimanenti* $n-\alpha$ *linee verticali, e così di seguito; in fine da tutti i gruppi di* k *linee orizzontali prese nelle residuali linee verticali; avvertendo che una linea orizzontale non sia due volte adoperata.*

Poichè le permutazioni di *n* simboli possono dividersi in coppie ciascuna delle quali comprende due gruppi differenti tra loro per lo scambio di due determinati simboli l' uno nell' altro; e poichè i numeri delle inversioni che presentano i gruppi di ciascuna coppia differiscono per un numero impari; così segue; che i termini del determinante a cui questi simboli dan luogo possono anche dividersi in coppie di due termini differenti tra loro pel segno e per lo scambio di due determinanti simboli l' uno nell' altro. Adunque se in ciascuno di questi termini si scambiano i suddetti simboli, il polinomio risultante sarà uguale e di segno contrario al determinante in parola; ma questo polinomio risultante è appunto il determinante il quale si ottiene dal precedente, scambiando l' una nell' altra le due colonne verticali che contengono i simboli permutati; adunque quando in un determinante si scambiano due linee verticali il valore del determinante cambia solo di segno.

Or si è dimostrato che se si scambiano le linee orizzontali in verticali, il determinante non cambia valore; quindi se dopo avere scambiate due linee verticali tra loro, cambiamo le linee orizzontali in verticali, si avrà un determinante che sarà di segno contrario a quello che si otterrebbe scambiando nel determinante primitivo le linee orizzontali in verticali, senza fare prima lo scambio di due linee verticali: adunque lo scambio di due linee orizzontali porta anche il cambiamento del segno del determinante: quindi, riunendo in una questa e la precedente deduzione, possiamo enunciare il seguente.

Teorema 11.° *Allorchè in un determinante si scambiano due linee verticali o orizzontali, il valore del determinante cambia soltanto di segno.*

Dalla anzidetta divisione in coppie dei termini di un determinante risulta: che se in ciascun termine dello sviluppo di un determinante si rendono uguali due determinati simboli, il polinomio risultante è identicamente zero; ma l'identità di questi due simboli porta l' identità delle due linee verticali del deter-

minante le quali contengono questi simboli: adunque se in un determinante due linee verticali s'identificano, esso si annulla. Partendo da questa conclusione con un ragionamento analogo a quello fatto poc'anzi si giunge all'altra conseguenza: che un determinante anche si annulla se s'identificano due linee orizzontali: adunque possiamo stabilire il seguente.

Teorema 12.° *Un determinante si annulla se due linee orizzontali o verticali s'identificano.*

Da questo teorema si deduce un altro di cui avremo bisogno in seguito. Supponiamo che in un determinante dell'ordine n^o siansi escluse m linee orizzontali, che noi supporremo essere le ultime; indi, considerando il quadro rimanente come un determinante, lo sviluppiamo in una somma di prodotti di determinanti minori rispettivamente degli ordini p ed $n-p$, essendo $p>m$ e $p<n-m$; un termine qualunque di questo sviluppo sarà della forma

$$(a_{1,1}\, a_{2,2} \dots a_{p,p})_x (a_{p+1,p-m+1}\, a_{p+2,p-m+2} \dots a_{p+m,p} \dots a_{n,n-m})_x .$$

Ora i secondi indici $1.2 \dots p$ dei simboli compresi nella prima parentesi indicano che le p linee verticali che formano il primo determinante minore $(a_{1,1}\, a_{2,2} \dots a_{p,p})_x$ sono prese nelle prime p linee orizzontali del determinante proposto; similmente i secondi indici $p-m+1, p-m+2, \dots p \dots n-m$ indicano che le $n-p$ linee verticali che formano il determinante minore

$$(a_{p+1,p-m+1}\, a_{p+2,p-m+2} \dots a_{p+m,p} \dots a_{n,n-m})_x$$

sono prese nelle linee orizzontali del proposto le quali sono comprese tra la $(p-m)^a$ e la $(n-m+1)^a$; quindi le ultime m linee orizzontali del primo determinante minore, e le prime m linee orizzontali del secondo sono prese nelle stesse linee orizzontali del proposto, le quali sono quelle comprese tra la $(p-m)^a$ e la $(p+1)^a$; e siccome questo discorso è applicabile ai determinanti minori che formano un termine qualunque dello sviluppo in parola; così questo rappresenterà il determinante che si forma dal proposto, escludendo le ultime m linee orizzontali, e ripetendo due volte di seguito il complesso delle linee orizzontali comprese tra la $(p-m)^a$ e la $(p+1)^a$; or questo determinante è evidentemente zero; adunque:

Teorema 13.° *Se in un determinante dell'ordine* n *si escludono* m *linee orizzontali, e considerando il quadro delle rimanenti linee come un determinante si sviluppa in una somma di prodotti di determinanti degli ordini* p *ed* n—p, *essendo* $p>m$, *e* $p<n-m$; *lo sviluppo è uguale a zero.*

CAPO TERZO

Addizione e sottrazione dei determinanti.

Se dinotiamo con P il determinante

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}+b_{1,1}+b_{2,1}+\cdots+b_{n,1}\,, a_{2,1}\,, a_{3,1}\ldots a_{n,1} \\ a_{1,2}+b_{1,2}+b_{2,2}+\cdots+b_{n,2}\,, a_{2,2}\,, a_{3,2}\ldots a_{n,2} \\ a_{1,3}+b_{1,3}+b_{2,3}+\cdots+b_{n,3}\,, a_{2,3}\,, a_{3,3}\ldots a_{n,3} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{1,n}+b_{1,n}+b_{2,n}+\cdots+b_{n,n}\,, a_{2,n}\,, a_{3,n}\ldots a_{n,n} \end{vmatrix}$$

e con P_r il determinanto minore che si ottiene, escludendo la prima linea verticale e la r^a orizzontale; si avrà

$$\begin{aligned} P=(a_{1,1}+b_{1,1}+b_{2,1}\ldots+b_{n,1})P_1-(a_{1,2}+b_{1,2}+b_{2,2}\ldots+b_{n,2})P_2\ldots \\ \pm(a_{1,n}+b_{1,n}+b_{2,n}\ldots+b_{n,n})P_n= \\ (a_{1,1}P_1-a_{1,2}P_2\ldots\pm a_{1,n}P_n)+(b_{1,1}P_1-b_{1,2}P_2\ldots\pm b_{1,n}P_n\ldots \\ +(b_{n,1}P_1-b_{n,2}P_2\ldots\pm b_{n,n}P_n\,; \end{aligned}$$

la quale uguaglianza, e la considerazione; che il cambiamento di una linea verticale qualunque colla prima può portare solo il cambiamento del segno del determinante; ci conducono al

Teorema 14.° *Se gli elementi di una qualunque linea verticale di un determinante risultano dalla somma di più grandezze; essa sarà uguale alla somma dei determinanti che si ottengono, combinando ciascuna linea elementare della linea complessa colle rimanenti linee del determinante.*

È evidente che questo teorema convenga anche al caso in cui gli elementi di una linea qualunque orizzontale siano composti da somme di più grandezze.

È facile di estendere il precedente teorema al caso generale in cui gli elementi di ciascuna linea verticale siano composti da somme di più grandezze: in fatti un determinante di questa specie può decomporsi nella somma di altri in cui la prima linea verticale sia una linea elementare della prima complessa: ciascuno di questi può decomporsi nella somma di altri in cui la seconda linea

sia una qualunque linea elementare di quelle che compongono la seconda linea del proposto, e così procedendo innanzi, giungeremo in fine ad una somma di determinanti che si formano dal proposto, prendendo in tutti i modi possibili una linea elementare in ciascuna delle linee composte del medesimo: adunque

Teorema 15.° *Il determinante di cui ciascun elemento è la somma di più grandezze è uguale alla somma dei determinanti formati da tutte le possibili combinazioni delle linee verticali elementari.*

Egli è da osservarsi che se una linea elementare di qualche linea complessa è identica con qualche linea elementare di un' altra linea complessa; allora il determinante che contiene queste due linee elementari svanisce.

Da ciò che precede risulta; che la somma di m determinanti i quali differiscono per la p^a linea verticale o orizzontale è uguale al determinante composto che si forma da uno qualunque degli m determinanti proposti; sostituendo alla p^a linea verticale o orizzontale un altra linea i cui elementi siano le somme degli elementi corrispondenti delle linee p^e dei proposti determinanti: ora se supponiamo che le p^e linee dei proposti determinanti divenissero uguali, la somma dei medesimi diviene uguale al prodotto di m per uno di essi, ed il determinante composto si riduce ad un altro che differisce dai proposti in quanto che ciascun elemento della p^a linea verticale o orizzontale è moltiplicata per m; adunque possiamo conchiudere il

Teorema 16.° *Se tutti gli elementi di una linea verticale ovvero orizzontale sono moltiplicati per una quantità; il determinante è moltiplicato per questa quantità.*

Segue immediatamente da questo teorema; che se si prendono negativamente tutti gli elementi di una linea verticale o orizzontale di un determinante; il determinante risultante sarà uguale, ma di segno contrario al proposto; quindi possiamo stabilire il seguente

Teorema 17.° *La differenza di due determinanti, che differiscono per la linea p^a verticale o orizzontale, è uguale al determinante che si forma da uno dei proposti, sostituendo alla p^a linea un altra i cui elementi siano le differenze degli elementi corrispondenti delle p^e linee dei determinanti proposti.*

Esempio 1.° *

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & z^2 & y^2 \\ 1 & z^2 & 0 & x^2 \\ 1 & y^2 & x^2 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{x^2y^2z^2} \begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & xyz^2 & xy^2z \\ y & xyz^2 & 0 & x^2yz \\ z & xy^2z & x^2yz & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix}$$

Se x, y, z dinotano i lati di un triangolo questo determinante è uguale a -16 volte il quadrato dell' area del medesimo.

* Questo esempio ed il seguente sono stati presi dalla teorica dei determinanti di Brioschi.

2.° Per le cose già dette è evidente che il determinante

$$P = \begin{vmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & s_0 & s_1+as_0 & s_2+as_1+bs_0 \\ s_0 & s_1+as_0 & s_2+as_1+bs_0 & s_3+as_2+bs_1+cs_0 \\ s_1 & s_2+as_1 & s_3+as_2+bs_1 & s_4+as_3+bs_2+cs_1 \end{vmatrix}$$

sia uguale all' altro

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_0 & s_1 & s_2 \\ s_0 & s_1 & s_2 & s_3 \\ s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix} \quad \text{ovvero all'altro} \quad \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix}$$

Ora se s_0, s_1, s_2, s_3, s_4 rappresentano le somme delle potenze zero, prime, seconde etc. delle radici dell' equazione

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0\,; \qquad (p)$$

per le conosciute relazioni tra i coefficienti e le somme delle potenze delle radici di un' equazione il determinante P si ridurrà all' altro

$$-\begin{vmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 3 & 2a & b \\ 3 & 2a & b & 0 \\ a & 2b & 3c & 0 \end{vmatrix} = a^2b^2 - 4b^3 - 4a^3c - 2ac^2 + 18abc\,;$$

ma questa espressione uguagliata a zero dinota appunto la condizione, perchè l' equazione (p) abbia due radici uguali; adunque questa condizione sarà benanche dinotata dall' equazione

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix} = 0$$

CAPO QUARTO

Risoluzione delle equazioni algebriche lineari.

I valori delle ignote di un sistema di equazioni di 1.° grado si possono esprimere in un modo conciso per mezzo dei determinanti. In fatti si abbia il sistema di n equazioni

$$
\begin{array}{l}
a_{1,1}x_1+a_{2,1}x_2+\cdots\cdots+a_{n,1}x_n=u_1\\
a_{1,2}x_1+a_{2,2}x_2+\cdots\cdots+a_{n,2}x_n=u_2\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
a_{1,n}x_1+a_{2,n}x_2+\cdots\cdots+a_{n,n}x_n=u_n;
\end{array}
$$

moltiplichiamo queste equazioni rispettivamente pei determinanti minori

$$\frac{P}{a_{1,1}}\,,\ \frac{P}{a_{1,2}}\cdots\cdots\frac{P}{a_{1,n}}$$

del determinante

$$
P=\begin{vmatrix}
a_{1,1}\,a_{2,1}\cdots\cdots\cdots a_{n,1}\\
a_{1,2}\,a_{2,2}\cdots\cdots\cdots a_{n,2}\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
a_{1,n}\,a_{2,n}\cdots\cdots\cdots a_{n,n}
\end{vmatrix};
$$

ed aggiungiamo alla prima l'equazioni che occupano un posto impari, e togliamo quelle che occupano un posto pari; si avrà

$$
\left(a_{1,1}\frac{P}{a_{1,1}}-a_{1,2}\frac{P}{a_{1,2}}\cdots\pm a_{1,n}\frac{P}{a_{1,n}}\right)x_1+\left(a_{2,1}\frac{P}{a_{1,1}}-a_{2,2}\frac{P}{a_{1,2}}\cdots\pm a_{2,n}\frac{P}{a_{1,n}}\right)x_2
$$

$$
+\cdots\cdots+\left(a_{n,1}\frac{P}{a_{1,1}}-a_{n,2}\frac{P}{a_{1,2}}\cdots\pm a_{n,n}\frac{P}{a_{1,n}}\right)a_n=
$$

$$
u_1\frac{P}{a_{1,1}}-u_2\frac{P}{a_{1,2}}\cdots\cdots\pm a_n\frac{P}{a_{1,n}}.
$$

Ora si ha che

$$
a_{1,1}\frac{P}{a_{1,1}}-a_{1,2}\frac{P}{a_{1,2}}\cdots\pm a_{1,n}\frac{P}{a_{1,n}}=P,
$$

$$
u_1\frac{P}{a_{1,1}}-u_2\frac{P}{a_{1,2}}\cdots\pm u_n\frac{P}{a_{1,n}}=\begin{vmatrix}
u_1\,a_{2,1}\cdots\cdots a_{n,1}\\
u_2\,a_{2,2}\cdots\cdots a_{n,2}\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\\
u_n\,a_{2,n}\cdots\cdots a_{n,n}
\end{vmatrix};
$$

ed inoltre si ha

$$a_{2,1}\frac{P}{a_{1,1}}-a_{2,2}\frac{P}{a_{1,2}}\cdots\pm a_{2,n}\frac{P}{a_{1,n}}=0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{n,1}\frac{P}{a_{1,1}}-a_{n,2}\frac{P}{a_{1,2}}\cdots\pm a_{n,n}\frac{P}{a_{1,n}}=0;$$

poichè questi polinomii rappresentano gli sviluppi dei determinanti che si ottengono da P, sostituendo alla prima linea verticale successivamente la seconda, la terza ec. in fine la n^a; e questi determinanti, avendo due linee verticali uguali, sono uguali a zero. Adunque si ha

$$Px_1=\begin{vmatrix} u_1 & a_{2,1} & \cdots & a_{n,1} \\ u_2 & a_{2,2} & \cdots & a_{n,2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u_n & a_{2,n} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Similmente si dimostrerebbe essere

$$Px_2=\begin{vmatrix} a_{1,1} & u_1 & \cdots & a_{n,1} \\ a_{1,2} & u_2 & \cdots & a_{n,2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1,n} & u_n & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} \cdots\cdots\cdots \quad Px_n=\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \cdots & u_1 \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \cdots & u_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1,n} & a_{2,n} & \cdots & u_n \end{vmatrix}.$$

Se nelle equazioni proposte fosse $u_1=u_2\cdots=u_n=0$, e non lo possono essere $x_1, x_2, \ldots x_n$; allora dovrà essere

$$P=0;$$

quindi il risultato dell'eliminazione delle ignote dal sistema di equazioni

$$a_{1,1}x_1+a_{2,1}x_2\cdots+a_{n,1}x_n=0$$

$$a_{1,2}x_1+a_{2,2}x_2\cdots+a_{n,2}x_n=0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{1,n}x_1+a_{2,n}x_2\cdots+a_{n,n}x_n=0$$

è appunto il determinante P uguagliato a zero: d'onde il

Teorema 18.° *Un determinante dell'ordine n° è in generale il risultato dell'eliminazione di n variabili da n equazioni lineari, i cui coefficienti sono gli elementi dei determinanti.*

Reciprocamente si ha il

Teorema 19.° *Se un determinante dell'ordine n° svanisce può sempre stabilirsi un sistema di n omogenee lineari equazioni i coefficienti delle quali sono gli elementi del dato determinante.*

Esempio 1.° La condizione perchè tre rette siano parallele ad un piano è data dall'eliminazione di x, y, z dalle equazioni

$$\begin{aligned} l x + m y + n z &= 0 \\ l_1 x + m_1 y + n_1 z &= 0 \\ l_2 x + m_2 y + n_2 z &= 0 ; \end{aligned}$$

cioè dal determinante

$$\begin{vmatrix} l & m & n \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0 .$$

2.° La condizione perchè quattro piani passino per un punto è data dall'eliminazione di x, y, z dalle equazioni

$$\begin{aligned} l x + m y + n z + k &= 0 \\ l_1 x + m_1 y + n_1 z + k_1 &= 0 \\ l_2 x + m_2 y + n_2 z + k_2 &= 0 \\ l_3 x + m_3 y + n_3 z + k_3 &= 0 , \end{aligned}$$

cioè dal determinante

$$\begin{vmatrix} l & m & n & k \\ l_1 & m_1 & n_1 & k_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 & k_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 & k_3 \end{vmatrix} = 0 .$$

3.° La condizione perchè tre rette s'intersechino in un punto è data dalla eliminazione di x, y dalle tre equazioni

$$\begin{aligned} a x + b y + c &= 0 \\ a_1 x + b_1 y + c_1 &= 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 &= 0 \end{aligned}$$

cioè dal determinante

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0 .$$

CAPO QUINTO

Moltiplicazione dei determinanti.

Se si formano dei gruppi, prendendo in tutti i modi possibili un termine in ciascuna delle n serie

$$a_{1.1}\,b_1\,,\ a_{2.1}\,b_2\ldots a_{n.1}\,b_n\,;\ a_{1.2}\,b_1\,,\ a_{2.2}\,b_2\ldots a_{n.2}\,b_n\ldots\ldots a_{1.n}\,b_1\,,\ a_{2.n}\,b_2\ldots a_{n.n}\,b_n\,, \qquad (a)$$

escludendo le combinazioni dei termini che occupano il medesimo posto in serie diverse; evidentemente questi gruppi, che chiameremo *originarii*, saranno i termini del seguente determinante

$$\begin{vmatrix} a_{1.1}\ a_{2.1}\ldots\ldots a_{n.1} \\ a_{1.2}\ a_{2.2}\ldots\ldots a_{n.2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1.n}\ a_{2.n}\ldots\ldots a_{n.n} \end{vmatrix} \qquad (2),$$

in ognuno dei quali ciascuno degli elementi che lo compongono è ~~preceduto~~ seguito da uno dei seguenti simboli

$$b_1\,,\ b_2\ldots\ldots b_n \qquad (b),$$

con un ordine diverso pei termini diversi. Ma se in ciascun gruppo *originario* scambiamo tra loro, in tutti i modi possibili, gli elementi del sistema (a) che lo compongono; indi a ciascuno dei gruppi risultanti, compresovi *l'originario*, diamo il segno $+$ o $-$, secondochè è pari o impari il numero delle Inversioni che presentano i simboli (b) che esso contiene; ed a questi simboli apponiamo per secondi indici i numeri che indicano la loro successione nel gruppo; evidentemente ciascun gruppo *originario* darà luogo al prodotto di un termine del determinante superiore (2) per un determinante che si ottiene dal seguente

$$\begin{vmatrix} b_{1.1}\ b_{2.1}\ldots\ldots b_{n.1} \\ b_{1.2}\ b_{2.2}\ldots\ldots b_{n.2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{1.n}\ b_{2.n}\ldots\ldots b_{n.n} \end{vmatrix} \qquad (3)$$

facendo tante inversioni nelle colonne verticali, quante inversioni presentano nel gruppo *originario* i simboli (b), ovvero i simboli $a_1, a_2, a_3 \ldots a_n$; quindi se teniamo conto del segno che deve avere nel determinante (2) il suo termine che fa da moltiplicatore, ciascun gruppo *originario* darà luogo al prodotto del determinante (3) per un termine del determinante (2), considerato col segno che gli appartiene. Ora dal teorema 15.° si rileva che un determinante della forma

$$\begin{vmatrix} {}_1b_{1.1}+{}_1b_{2.1}\cdots+{}_1b_{n.1}, & {}_2b_{1.1}+{}_2b_{2.1}\cdots+{}_2b_{n.1}, & \cdots & {}_pb_{1.1}+{}_pb_{2.1}\cdots+{}_pb_{n.1}, & \cdots & {}_nb_{1.1}+{}_nb_{2.1}\cdots{}_nb_{n.1} \\ {}_1b_{1.2}+{}_1b_{2.2}\cdots+{}_1b_{n.2}, & {}_2b_{1.2}+{}_2b_{2.2}\cdots+{}_2b_{n.2}, & \cdots & {}_pb_{1.2}+{}_pb_{2.2}\cdots+{}_pb_{n.2}, & \cdots & {}_nb_{1.2}+{}_nb_{2.2}\cdots{}_nb_{n.2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ {}_1b_{1.n}+{}_1b_{2.n}\cdots+{}_1b_{n.n}, & {}_2b_{1.n}+{}_2b_{2.n}\cdots+{}_2b_{n.n}, & \cdots & {}_pb_{1.n}+{}_pb_{2.n}\cdots+{}_pb_{n.n}, & \cdots & {}_nb_{1.n}+{}_nb_{2.n}\cdots{}_nb_{n.n} \end{vmatrix}$$

è uguale alla somma dei determinanti formati da tutte le possibili combinazioni delle linee verticali elementari; ovvero alla somma dei determinanti che si ottengono dalle permutazioni di ciascuno dei gruppi di n simboli che si hanno prendendo in tutti i modi possibili un simbolo in ciascuna delle n serie

$${}_1b_1, {}_1b_2 \ldots {}_1b_n;\ {}_2b_1, {}_2b_2 \ldots {}_2b_n \ldots\ldots {}_pb_1, {}_pb_2 \ldots {}_pb_n \ldots\ldots {}_nb_1, {}_nb_2 \ldots {}_nb_n; \qquad (c)$$

poichè il determinante formato dalle permutazioni di uno qualunque dei suddetti gruppi, *p. e.* ${}_1b_{i_1}\, {}_2b_{i_2}\, {}_3b_{i_3} \ldots {}_nb_{i_n}$ è appunto

$$\begin{vmatrix} {}_1b_{i_1.1}, & {}_2b_{i_2.1}, & {}_3b_{i_3.1} & \cdots\cdots & {}_nb_{i_n.1} \\ {}_1b_{i_1.2}, & {}_2b_{i_2.2}, & {}_3b_{i_3.2} & \cdots\cdots & {}_nb_{i_n.2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ {}_1b_{i_1.n}, & {}_2b_{i_2.n}, & {}_3b_{i_3.n} & \cdots\cdots & {}_nb_{i_n.n} \end{vmatrix}.$$

Ma se in vece di dare degli indici a sinistra alle b del precedente sistema (c); poniamo innanzi a ciascuna b la lettera a con due indici dei quali l'uno indichi il posto che occupa la b in una serie, e l'altro indichi il posto che questa serie occupa nel sistema; evidentemente il sistema (c) si converte nel sistema (a).

Quindi la somma dei determinanti i quali risultano dalle permutazioni di ciascuno dei gruppi di n simboli che si ottengono, prendendo in tutti i modi

possibili un simbolo in ciascuna delle serie $(a)'$, è appunto

$$\begin{vmatrix} a_{1.1}\, b_{1.1}+a_{2.1}\, b_{2.1}\cdots+a_{n.1}\, b_{n.1}\,, & a_{1.2}\, b_{1.1}+\cdots+a_{n.2}\, b_{n.1} & \cdots & a_{1.n}\, b_{1.1}+\cdots+a_{n.n}\, b_{n.1} \\ a_{1.1}\, b_{1.2}+a_{2.1}\, b_{2.2}\cdots+a_{n.1}\, b_{n.2}\,, & a_{1.2}\, b_{1.2}+\cdots+a_{n.2}\, b_{n.2} & \cdots & a_{1.n}\, b_{1.2}+\cdots+a_{n.n}\, b_{n.2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1.1}\, b_{1.n}+a_{2.1}\, b_{2.n}\cdots+a_{n.1}\, b_{n.n}\,, & a_{1.2}\, b_{1.n}+\cdots+a_{n.2}\, b_{n.n} & \cdots & a_{1.n}\, b_{1.n}+\cdots+a_{n.n}\, b_{n.n} \end{vmatrix};$$

ma i determinanti i quali risultano dal prendere nelle serie (a) gli elementi che occupano il medesimo posto, che sarebbero appunto quelli formati dalle linee verticali elementari del precedente le quali occupano il medesimo posto, sono uguali a zero: adunque se indichiamo con P il precedente determinante, e con P′ e P″ i determinanti (2) e (3), si avrà la relazione

$$P = P' \times P''$$

la quale dà luogo al seguente

Teorema 20.° *Il prodotto di due determinanti è uguale al determinante, in cui ciascun elemento di una linea qualunque orizzontale è uguale alla somma dei prodotti che si ottengono moltiplicando gli elementi della linea orizzontale, che occupa lo stesso posto nell' un determinante fattore, per gli elementi corrispondenti della linea orizzontale dell' altro determinante fattore, la quale occupa lo stesso posto che occupa l' elemento del determinante prodotto nella sua linea orizzontale.*

Reciprocamente si ha il

Teorema 21.° *Un determinante i cui elementi sono funzioni lineari di dati elementi, i coefficienti essendo gli stessi per ciascuna linea orizzontale, è uguale al prodotto di due determinanti dei quali gli elementi sono rispettivamente gli elementi dati ed i coefficienti.*

Il teorema ora dimostrato pel prodotto di due determinanti ci conduce a stabilire altre forme sotto le quali si può presentare il medesimo prodotto. In fatti i due determinanti

possono mettersi sotto le forme seguenti

$$
\begin{vmatrix} a_{1.1} & a_{2.1} & \ldots\ldots & a_{n.1} & 0 \\ a_{1.2} & a_{2.2} & \ldots\ldots & a_{n.2} & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1.n} & a_{2.n} & \ldots\ldots & a_{n.n} & 0 \\ 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 & 1 \end{vmatrix}
\qquad
-\begin{vmatrix} b_{1.1} & b_{2.1} & \ldots\ldots & 0 & b_{n.1} \\ b_{1.2} & b_{2.2} & \ldots\ldots & 0 & b_{n.2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{1.n} & b_{2.n} & \ldots\ldots & 0 & b_{n.n} \\ 0 & 0 & \ldots\ldots & 1 & 0 \end{vmatrix}:
$$

ora applicando a questi due determinanti dell' ordine $(n+1)^{\circ}$ il teorema 20.°; si avrà che il prodotto dei due determinanti **A** e **B** sarà

$$
-\begin{vmatrix} a_{1.1}b_{1.1}+a_{2.1}b_{2.1}\cdots+a_{n-1.1}b_{n-1.1} & \cdots & a_{1.1}b_{1.n}+\cdots+a_{n-1.1}b_{n-1.n}\,, & a_{n.1} \\ a_{1.2}b_{1.1}+a_{2.2}b_{2.1}\cdots+a_{n-1.2}b_{n-1.1} & \cdots & a_{1.2}b_{1.n}+\cdots+a_{n-1.2}b_{n-1.n}\,, & a_{n.2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1.n}b_{1.1}+a_{2.n}b_{2.1}\cdots+a_{n-1.n}b_{n-1.1} & \cdots & a_{1.n}b_{1.n}+\cdots+a_{n-1.n}b_{n-1.n}\,, & a_{n.n} \\ b_{n.1} & & b_{n.n} & 0 \end{vmatrix}.
$$

Se gli stessi due determinanti **A** e **B** si pongono sotto le forme

$$
\begin{vmatrix} a_{1.1} & a_{2.1} & \ldots & a_{n-1.1} & a_{n.1} & 0 & 0 \\ a_{1.2} & a_{2.2} & \ldots & a_{n-1.2} & a_{n.2} & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1.n} & a_{2.n} & \ldots & a_{n-1.n} & a_{n.n} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}
\qquad
\begin{vmatrix} b_{1.1} & b_{2.1} & \ldots & 0 & 0 & b_{n-1.1} & b_{n.1} \\ b_{1.2} & b_{2.2} & \ldots & 0 & 0 & b_{n-1.2} & b_{n.2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{1.n} & b_{2.n} & \ldots & 0 & 0 & b_{n-1.n} & b_{n.n} \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix},
$$

applicando lo stesso teorema di sopra richiamato; si avrà che il prodotto dei determinanti **A** e **B** si potrà porre sotto la forma

$$
\begin{vmatrix} a_{1.1}b_{1.1}+\cdots+a_{n-2.1}b_{n-2.1} & \cdots & a_{1.1}b_{1.n}\cdots+a_{n-2.1}b_{n-2.n}\,, & a_{n-1.1}\,, & a_{n.1} \\ a_{1.2}b_{1.1}+\cdots+a_{n-2.2}b_{n-2.1} & \cdots & a_{1.2}b_{1.n}\cdots+a_{n-2.2}b_{n-2.n}\,, & a_{n-1.2}\,, & a_{n.2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1.n}b_{1.1}+\cdots+a_{n-2.n}b_{n-2.1} & \cdots & a_{1.n}b_{1.n}\cdots+a_{n-2.n}b_{n-2.n}\,, & a_{n-1.n}\,, & a_{n.n} \\ b_{n-1.1} & & b_{n-1.n} & 0 & 0 \\ b_{n.1} & & b_{n.n} & 0 & 0 \end{vmatrix}.
$$

Progredendo nel medesimo modo si giungerà alla seguente forma generale del prodotto **AB**

$$
(-1)^{n-i}\begin{vmatrix}
a_{1,1}b_{1,1}+\cdots+a_{i,1}b_{i,1}, & a_{1,1}b_{1,2}\cdots+a_{i,1}b_{i,2}\cdots & a_{1,1}b_{1,i}\cdots+a_{i,1}b_{i,i}, & a_{i+1,1}\cdots & a_{n,1}\\
a_{1,2}b_{1,1}+\cdots+a_{i,2}b_{i,1}, & a_{1,2}b_{1,2}\cdots+a_{i,2}b_{i,2}\cdots & a_{1,2}b_{1,i}\cdots+a_{i,2}b_{i,i}, & a_{i+1,2}\cdots & a_{n,2}\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
a_{1,n}b_{1,1}+\cdots+a_{i,n}b_{i,1}, & a_{1,n}b_{1,2}\cdots+a_{i,n}b_{i,2}\cdots & a_{1,n}b_{1,i}\cdots+a_{i,n}b_{i,i}, & a_{i+1,n}\cdots & a_{n,n}\\
b_{i+1,1} & b_{i+1,2} & b_{i+1,i} & 0 & 0\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
b_{n,1} & b_{n,2} & b_{n,i} & 0 & 0
\end{vmatrix}
$$

Quindi possiamo enunciare il seguente

Teorema 22.° *Se si divide ciascuno di due determinanti dell' n° ordine A e B in due parti contenenti rispettivamente* i *ed* n—i *linee verticali, indi si moltiplica ciascuna linea orizzontale della prima parte di A per ciascuna linea orizzontale della prima parte di B, e i risultati si dispongono in quadro; in fine si completa questo quadro colle seconde parti di A e B, disponendole simmetricamente (la parte di A parallelamente alle linee verticali, e la parte di B parallelamente alle linee orizzontali) il quadro risultante, fatta astrazione dal segno algebrico, rappresenterà il prodotto AB.*

È da avvertirsi che se i due determinanti di cui si voglia il prodotto siano rispettivamente degli ordini m ed n, essendo $m > n$, allora parallelamente alle linee verticali ed orizzontali del determinante di ordine n si porranno $m-n$ linee i cui elementi siano tutti zero, eccetto quelli che restano sulla diagonale i quali siano uguali ad 1; ed in tal modo si rientrerà nel caso da noi considerato di due determinanti del medesimo ordine.

Crediamo opportuno di aggiungere qui appresso le diverse forme sotto cui può esibirsi il prodotto di due determinanti del secondo ordine, e quelle di due determinanti di terzo ordine.

$$
\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \\ \alpha & \beta & 0 & 0 \\ \gamma & \delta & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a\alpha, & a\gamma, & b \\ c\alpha, & c\gamma, & d \\ \beta & \delta & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\alpha+b\beta, & a\gamma+b\delta \\ c\alpha+d\beta, & c\gamma+d\delta \end{vmatrix}
$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & a' & b' & c' \\ 0 & 0 & 0 & a'' & b'' & c'' \\ \alpha & \beta & \gamma & 0 & 0 & 0 \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & 0 & 0 & 0 \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \alpha a, & \alpha a', & \alpha a'', & b, & c \\ \alpha' a, & \alpha' a', & \alpha' a'', & b', & c' \\ \alpha'' a, & \alpha'' a', & \alpha'' a'', & b'', & c'' \\ \beta, & \beta', & \beta'', & 0, & 0 \\ \gamma, & \gamma', & \gamma'', & 0, & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} \alpha a + b\beta, & \alpha a' + b\beta', & \alpha a'' + b\beta'', & c \\ \alpha' a + b'\beta, & \alpha' a' + b'\beta', & \alpha' a'' + b'\beta'', & c' \\ \alpha'' a + b''\beta, & \alpha'' a' + b''\beta', & \alpha'' a'' + b''\beta'', & c'' \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} \alpha a + b\beta + c\gamma, & \alpha a' + b\beta' + c\gamma', & \alpha a'' + b\beta'' + c\gamma'' \\ \alpha' a + b'\beta + c'\gamma, & \alpha' a' + b'\beta' + c'\gamma', & \alpha' a'' + b'\beta'' + c'\gamma'' \\ \alpha'' a + b''\beta + c''\gamma, & \alpha'' a' + b''\beta' + c''\gamma', & \alpha'' a'' + b''\beta'' + c''\gamma'' \end{vmatrix}.$$

Il prodotto di due determinanti può essere esibito come la somma di una serie di prodotti di determinanti del medesimo ordine dei primi, la quale forma è di grande utilità per la dimostrazione dei teoremi geometrici.

Per le cose già dette si ha; che un determinante dell'ordine n^o si può sviluppare in una somma di prodotti di determinanti minori degli ordini i ed $n-i$, formati, prendendo in tutti i modi possibili i linee verticali in i qualunque linee orizzontali, e le complementari $n-i$ linee verticali nelle rimanenti $n-i$ linee orizzontali; ora questo equivale a dividere il determinante in tutti i modi possibili in i ed $n-i$ linee verticali, e prendere in ciascuna divisione sempre le medesime i linee orizzontali nelle prime i linee verticali, e le $n-i$ complementari nelle seconde $n-i$ linee verticali; per modo che diviso un determinante dell'ordine n in un modo qualunque in i ed $n-i$ linee verticali, se dinotiamo con α_p il primo gruppo di i linee orizzontali delle prime i linee verticali, e con β_p il gruppo delle $n-i$ linee orizzontali complementari prese nelle seconde $n-i$ linee verticali; la somma dei prodotti dei determinanti minori $\alpha_p.\beta_p$, corrispondenti a tutte le possibili divisioni del determinante proposto in i ed $n-i$ linee verticali, sarà lo sviluppo di questo determinante.

Ora se indichiamo con a_1, a_2, a_3 ec. tutti i gruppi possibili di i linee

orizzontali prese nelle prime i linee verticali di un determinante dell' ordine n^o, e con b_1, b_2, b_3 ec. tutti i gruppi complementari di $n-i$ linee orizzontali prese nelle seconde $n-i$ linee verticali; si avrà

$$\mathrm{A} = a_1 b_1 \pm a_2 b_2 \pm a_3 b_3 \pm \text{ec.}$$

Similmente se indichiamo con α_1, α_2, α_3 ec. i gruppi formati dalle stesse combinazioni delle linee orizzontali di i qualunque linee verticali di un altro determinante B dell' n^o ordine di quelle che hanno dato luogo ai gruppi a_1, a_2, a_3, nel determinante A; e con β_1, β_2, β_3 ec. i gruppi complementari di $n-i$ linee orizzontali prese nelle rimanenti $n-i$ linee verticali; sarà

$$\mathrm{B} = \pm \alpha_1 \beta_1 \pm \alpha_2 \beta_2 \pm \alpha_3 \beta_3 \pm \text{ec.}$$

Laonde nel prodotto dei due determinanti A, B vi sarà una parte che è rappresentata dal polinomio

$$\pm a_1 b_1 \alpha_1 \beta_1 \pm a_2 b_2 \alpha_2 \beta_2 \pm a_3 b_3 \alpha_3 \beta_3 \pm \text{ec.}$$

che può esser posta sotto la forma

$$\pm a_1 \beta_1 \alpha_1 b_1 \pm a_2 \beta_2 \alpha_2 b_2 \pm a_3 \beta_3 \alpha_3 b_3 \pm \text{ec.} \qquad (1)$$

Ora se formiamo due determinanti A_1, B_1, sostituendo successivamente alle prime i ed alle seconde $n-i$ linee verticali di A le i e le $n-i$ linee verticali della precedente divisione di B; è evidente che gli sviluppi di questi due determinanti A_1 e B_1 saranno

$$a_1 \beta_1 \pm a_2 \beta_2 \pm a_3 \beta_3 \pm \text{ec.}$$
$$\alpha_1 b_1 \pm \alpha_2 b_2 \pm \alpha_3 b_3 \pm \text{ec.}:$$

laonde se dinotiamo con $\Sigma \pm a_m b_n \alpha_n \beta_m$ la somma dei prodotti dei termini dei suddetti sviluppi che non sono in linea verticale, si avrà che il polinomio (1) sarà uguale ad

$$\mathrm{A}_1 \mathrm{B}_1 - \Sigma \pm a_m b_n \alpha_n \beta_m.$$

Ora se formiamo i polinomii (1) corrispondenti a tutte le divisioni possibili di B in i ed in $n-i$ linee verticali; la somma di questi polinomii può mettersi sotto una delle due seguenti forme

$$a_1 b_1 \Sigma \pm \alpha_1 \beta_1 \pm a_2 b_2 \Sigma \pm \alpha_2 \beta_2 \pm a_3 b_3 \Sigma \pm \alpha_3 \beta_3 \pm \text{ec.}$$
$$\Sigma \pm \mathrm{A}_1 \mathrm{B}_1 - \Sigma \pm a_m b_n \Sigma \pm \alpha_n \beta_m:$$

ora per le cose già dette ciascuna delle somme

$$\Sigma \pm \alpha_1 \beta_1 \;,\; \Sigma \pm \alpha_2 \beta_2 \;,\; \Sigma \pm \alpha_3 \beta_3 \;\text{ ec.}$$

rappresenta lo sviluppo di B; inoltre, poichè α_n, β_m rappresentano due determinanti minori non complementari di B; così $\Sigma \pm \alpha_n \beta_m$ rappresenta lo sviluppo del quadro che risulta da B, sopprimendo una o più linee orizzontali, in una somma di prodotti di determinanti minori degli ordini i ed $n-i$; e questo sviluppo pel teorema 13° è zero: adunque si avrà il

Teorema 23.° *Se vi sono due determinanti A e B ciascuno dell'ordine* n; *e se A è diviso in un modo determinato in due parti contenenti* i *ed* n—i *linee verticali; e se B è diviso in tutte le maniere possibili in due parti contenenti* i *ed* n—i *linee verticali; il prodotto dei due determinanti sarà uguale*

alla somma de' prodotti dei determinanti i quali risultano dal successivo scambio di una delle parti di A con la corrispondente parte di B.

Applicazione **1.ª** Come prima applicazione del prodotto di due determinanti riportiamo la dimostrazione di Brioschi di un teorema enunciato da Sylvester

Teorema. Il valore del determinante

$$P = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \ldots\ldots & a_{n,1} & 1 \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \ldots\ldots & a_{n,2} & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1,n} & a_{2,n} & \ldots\ldots & a_{n,n} & 1 \\ 1 & 1 & \ldots\ldots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

è uguale a quello del determinante

$$P' = \begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{2,1} & \ldots\ldots & A_{n,1} & 1 \\ A_{1,2} & A_{2,2} & \ldots\ldots & A_{n,2} & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1,n} & A_{2,n} & \ldots\ldots & A_{n,n} & 1 \\ 1 & 1 & \ldots\ldots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

nel quale $$A_{r,s} = a_{r,s} + b_r + k_s,$$

essendo $b_1, b_2 \ldots ; k_1, k_2 \ldots$ due serie di quantità arbitrarie.

Infatti si moltiplichi il determinante P pel seguente

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots\ldots & 0 & k_1 \\ 0 & 1 & \ldots\ldots & 0 & k_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots\ldots & 1 & k_n \\ 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

ed il prodotto sarà

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}+k_1 & a_{2,1}+k_2 & \ldots\ldots & 1 \\ a_{1,2}+k_1 & a_{2,2}+k_2 & \ldots\ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1,n}+k_1 & a_{2,n}+k_2 & \ldots\ldots & 1 \\ 1 & 1 & & 0 \end{vmatrix}.$$

Si moltiplichi questo risultato pel determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots\ldots & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & \ldots\ldots & 0 & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots\ldots & 1 & b_n \\ 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

e si avrà per risultato il determinante P.

2.ª Supponiamo che vi siano due tetraedri i cui volumi siano *

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & 1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & 1 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & 1 \\ \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 & 1 \end{vmatrix}.$$

Il prodotto di questi due determinanti (staccando da ciascuno di essi soltanto l'ultima linea verticale) può essere rappresentato dal determinante

$$\begin{vmatrix} \Sigma x_1\alpha_1 & \Sigma x_1\alpha_2 & \Sigma x_1\alpha_3 & \Sigma x_1\alpha_4 & 1 \\ \Sigma x_2\alpha_1 & \Sigma x_2\alpha_2 & \Sigma x_2\alpha_3 & \Sigma x_2\alpha_4 & 1 \\ \Sigma x_3\alpha_1 & \Sigma x_3\alpha_2 & \Sigma x_3\alpha_3 & \Sigma x_3\alpha_4 & 1 \\ \Sigma x_4\alpha_1 & \Sigma x_4\alpha_2 & \Sigma x_4\alpha_3 & \Sigma x_4\alpha_4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

in cui in generale un termine come $\Sigma x_r\alpha_s$ rappresenta

$$x_r\alpha_s + y_r\beta_s + z_r\gamma_s.$$

Inoltre aggiungendo

$$-\tfrac{1}{2}\Sigma x_1^2,\ -\tfrac{1}{2}\Sigma x_2^2,\ -\tfrac{1}{2}\Sigma x_3^2,\ -\tfrac{1}{2}\Sigma x_4^2$$

alle rispettive linee orizzontali, e

$$-\tfrac{1}{2}\Sigma\alpha_1^2,\ -\tfrac{1}{2}\Sigma\alpha_2^2,\ -\tfrac{1}{2}\Sigma\alpha_3^2,\ -\tfrac{1}{2}\Sigma\alpha_4^2$$

alle rispettive linee verticali; il precedente determinante (dopo un cambia-

* Le applicazioni 2ª e 3ª sono riportate così da Spottiswoode — Theorems relating to Determinants.

mento di segni che non altera il risultato) diviene uguale a $-\frac{1}{8}$ di

$$\begin{vmatrix} \Sigma(x_1-\alpha_1)^2 & \Sigma(x_1-\alpha_2)^2 & \Sigma(x_1-\alpha_3)^2 & \Sigma(x_1-\alpha_4)^2 & 1 \\ \Sigma(x_2-\alpha_1)^2 & \Sigma(x_2-\alpha_2)^2 & \Sigma(x_2-\alpha_3)^2 & \Sigma(x_2-\alpha_4)^2 & 1 \\ \Sigma(x_3-\alpha_1)^2 & \Sigma(x_3-\alpha_2)^2 & \Sigma(x_3-\alpha_3)^2 & \Sigma(x_3-\alpha_4)^2 & 1 \\ \Sigma(x_4-\alpha_1)^2 & \Sigma(x_4-\alpha_2)^2 & \Sigma(x_4-\alpha_3)^2 & \Sigma(x_4-\alpha_4)^2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}:$$

ovvero, chiamando a , b , c , d i vertici di un solido, e p , q , r , s quelli dell' altro, 8×36 cioè 288 volte il loro prodotto è rappresentato da

$$\begin{vmatrix} \overline{ap}^2 & \overline{aq}^2 & \overline{ar}^2 & \overline{as}^2 & 1 \\ \overline{bp}^2 & \overline{bq}^2 & \overline{br}^2 & \overline{bs}^2 & 1 \\ \overline{cp}^2 & \overline{cq}^2 & \overline{cr}^2 & \overline{cs}^2 & 1 \\ \overline{dp}^2 & \overline{dq}^2 & \overline{dr}^2 & \overline{ds}^2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Ora se p , q , r , s coincidono rispettivamente con a , b , c , d ; 576 volte il quadrato del tetraedro *abcd* sarà rappresentato sotto la forma di Cayley

$$\begin{vmatrix} 0 & \overline{ab}^2 & \overline{ac}^2 & \overline{ad}^2 & 1 \\ \overline{ba}^2 & 0 & \overline{bc}^2 & \overline{bd}^2 & 1 \\ \overline{ca}^2 & \overline{cb}^2 & 0 & \overline{cd}^2 & 1 \\ \overline{da}^2 & \overline{db}^2 & \overline{dc}^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

3.ª Siano le aree di due triangoli rappresentate dai determinanti

$$A = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad B = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix};$$

pel secondo metodo della moltiplicazione dei determinanti si ha

$$AB = \begin{vmatrix} x_1 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ y_1 & \beta_1 & \beta_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_3 & x_2 & x_3 \\ \beta_3 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ y_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_1 & x_2 & x_3 \\ \beta_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & \alpha_3 & \alpha_1 \\ y_1 & \beta_3 & \beta_1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_2 & x_2 & x_3 \\ \beta_2 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix};$$

quindi se ABC, DEF sono i due triangoli; sarà

$$\mathrm{ABC}\times\mathrm{DEF}=\mathrm{ADE}\times\mathrm{FBC}+\mathrm{AEF}\times\mathrm{DBC}+\mathrm{AFD}\times\mathrm{BFC}.$$

4.° Sia *

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$$

l'equazione di una conica, e siano $(x, y)\,(x', y')\,(x'', y'')$ tre punti presi sulla conica o fuori di essa; inoltre poniamo

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=a_{1,1} \qquad \frac{x'x''}{a^2}+\frac{y'y''}{b^2}-1=a_{2,3}$$

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}-1=a_{2,2} \qquad \frac{x''x}{a^2}+\frac{y''y}{b^2}-1=a_{3,1}$$

$$\frac{x''^2}{a^2}+\frac{y''^2}{b^2}-1=a_{3,3} \qquad \frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}-1=a_{1,2}.$$

Ora se dinotiamo con A l'area del triangolo i cui vertici sono $(x,y)\,(x',y')(x'',y'')$, si ha

$$\mathrm{P}=\begin{vmatrix}\frac{x}{a} & \frac{y}{b} & 1\\ \frac{x'}{a} & \frac{y'}{b} & 1\\ \frac{x''}{a} & \frac{y''}{b} & 1\end{vmatrix}=\pm 2\frac{\mathrm{A}}{ab} \qquad \mathrm{P}'=\begin{vmatrix}\frac{x}{a} & \frac{y}{b} & -1\\ \frac{x'}{a} & \frac{y'}{b} & -1\\ \frac{x''}{a} & \frac{y''}{b} & -1\end{vmatrix}=\mp 2\frac{\mathrm{A}}{ab};$$

ma pel teorema 20.° si ha

$$\mathrm{PP}'=\begin{vmatrix}a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3}\\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3}\\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3}\end{vmatrix};$$

quindi sarà

$$\mathrm{A}=\tfrac{1}{2}ab\left(-a_{1,1}\,a_{2,2}\,a_{3,3}+a_{1,1}\,a_{2,3}^2+a_{2,2}\,a_{3,1}^2+a_{3,3}\,a_{1,2}^2-2a_{2,3}\,a_{3,1}\,a_{1,2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Quando il triangolo è iscritto nella conica

$$a_{1,1}=0 \quad a_{2,2}=0 \quad a_{3,3}=0;$$

e se f, g, h sono le corde che congiungono i punti $(x, y)\,(x', y')\,(x'', y'')$, ed F, G, H i semidiametri paralleli ad f, g, h sarà

$$-2a_{2,3}=\frac{(x'-x'')^2}{a^2}+\frac{(y'-y'')^2}{b^2}=\frac{f^2}{\mathrm{F}^2},\quad -2a_{3,1}=\frac{(x-x'')^2}{a^2}+\frac{(y-y'')^2}{b^2}=\frac{g^2}{\mathrm{G}^2}$$

$$-2a_{1,2}=\frac{(x-x')^2}{a^2}+\frac{(y-y')^2}{b^2}=\frac{h^2}{\mathrm{H}^2};$$

e quindi

$$\mathrm{A}=\tfrac{1}{4}ab\,\frac{fgh}{\mathrm{FGH}};$$

* Questa applicazione è stata presa da una memoria di M. Joachimstal (Crelle XI 30).

dalla quale relazione si rileva che: *il doppio dell'area di un triangolo iscritto in un' ellisse sta al prodotto degli assi principali come il prodotto dei lati sta al prodotto dei diametri ad essi paralleli.*

Se l' ellisse diviene un cerchio

$$a=b=F=G=H=r,$$

essendo r il raggio del cerchio, e quindi la precedente relazione si riduce all' altra

$$A=\frac{fgh}{4r}.$$

Or dividendo questa per l'equazione corrispondente all'ellisse si ha

$$r=\frac{FGH}{ab};$$

e quindi

Il raggio di un cerchio che passa per tre punti di una ellisse è uguale al prodotto dei semidiametri paralleli ai lati del triangolo iscritto, diviso pel prodotto dei semiassi.

FINE.